非可換幾何の基礎

吉井真央

2022 年 3 月 4 日

概要

非可換空間の理論が薄膜積層系の研究に必要になったので、勉強ノートを作成する。

目次

1 代数構造

d 次元空間の座標を $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_d$ とする。この時、空間の非可換性を反対称行列 θ を用いて

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij} \tag{1}$$

と定義する。以降では θ によって定義される実非可換空間を $\mathbb{R}_\theta$ と表記する。特に可換の場合は $x \in \mathbb{R}_0$ のように表記し、非可換の際には $\hat{x}$ のようにハットをつけて区別する。

1.1 Weyl 順序

1.1.1 定義

可換な理論を非可換な理論に変換する際の systematic な手続きとして Weyl 順序がある。この手法では可換な空間 $\mathbb{R}_0^d$ 上で定義された関数 f を非可換空間上の関数 $\widehat{\mathcal{W}}[f]$ に以下の手順で変換する。

Fourier 変換

関数 f に対し Fourier 変換を行い、$\tilde{f}$ を以下のように定義する。

$$\tilde{f}(k) = \int d^d x f(x) e^{-ikx} \tag{2}$$

$$kx = \sum_{i=1}^{d} k_n x^n \tag{3}$$

Weyl 表現

$\tilde{f}$ の逆 Fourier 変換の代わりに e^{ikx} の x を非可換空間の元 $\hat{x}$ に置き換えた $e^{ik\hat{x}}$ で積分する。

$$\widehat{\mathcal{W}}[f](\hat{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \tilde{f}(k) e^{ik\hat{x}} \tag{4}$$

この $\widehat{\mathcal{W}}$ を Weyl symbol と呼ぶ。

以上の 2 つをまとめると、f を $\widehat{W}[f]$ に変換するには

$$\widehat{\mathcal{W}}[f](\hat{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \Big(\int d^d x f(x) e^{-ikx} \Big) e^{ik\hat{x}} \tag{5}$$

とすればよく、k, x には非可換性が入っていない事から

$$\widehat{\mathcal{W}}[f](\hat{x}) = \int d^d x f(x) \widehat{\Delta}(x, \hat{x}) \tag{6}$$

$$\widehat{\Delta}(x, \hat{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k e^{-ikx} e^{ik\hat{x}} \tag{7}$$

と書きなおす事が出来る。ここで $\widehat{\Delta}$ は quantizer と呼ばれるらしい。

命題 1.

$$\delta(k - k_0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d x \ e^{-i(k-k_0)x} \tag{8}$$

$$\mathcal{F}[\delta(k - k_0)] = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \ \delta(k - k_0) e^{ikx} = \frac{e^{ik_0 x}}{(2\pi)^d} \tag{9}$$

から

$$\delta(k - k_0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d x \ e^{-ikx} e^{ik_0 x} \tag{10}$$

命題 2.

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \ e^{ik(x-x_0)} \tag{11}$$

$$\mathcal{F}[\delta(x-x_0)] = \int d^dx\ \delta(x-x_0)e^{-ikx} = e^{-ikx_0} \tag{12}$$

から

$$\delta(x-x_0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dk\ e^{ik(x-x_0)} \tag{13}$$

命題 3. f が実の時、$\tilde{\mathcal{W}}[f]$ はエルミート

f が実の時、$\tilde{f}(k) = \tilde{f}(-k)^*$。この時、

$$\widehat{\mathcal{W}}[f](x)^\dagger = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dk\tilde{f}^*(k)e^{-ik\hat{x}} \tag{14}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dk\tilde{f}(-k)e^{-ik\hat{x}} \tag{15}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dk\tilde{f}(k)e^{ik\hat{x}} = \widehat{\mathcal{W}}[f](x) \tag{16}$$

命題 4.

$$\widehat{\Delta}(x,\hat{x})^\dagger = \widehat{\Delta}(x,\hat{x}) \tag{17}$$

$$\widehat{\Delta}(x,\hat{x})^\dagger = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dke^{-ik\hat{x}}e^{ikx} \tag{18}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dke^{ikx}e^{-ik\hat{x}} \tag{19}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dke^{-ikx}e^{ik\hat{x}} = \widehat{\Delta}(x,\hat{x}) \tag{20}$$

ここで *1* 行目から *2* 行目へは e^{-ikx} が可換空間の関数であるために $e^{ik\hat{x}}$ と交換する事、*2* 行目から *3* 行目へは $k \to -k$ という変換を行った。

命題 5.

$$\widehat{\mathcal{W}}[f]^\dagger = \widehat{\mathcal{W}}[f^\dagger] \tag{21}$$

$$\widehat{\mathcal{W}}[f]^\dagger = \Big[\int d^dx \hat{\Delta}(x,\hat{x}) f(x)\Big]^\dagger \tag{22}$$
$$= \int d^dx \hat{\Delta}(x,\hat{x}) f(x)^\dagger \tag{23}$$
$$= \widehat{\mathcal{W}}[f^\dagger] \tag{24}$$

命題 6.

$$\int d^dz e^{ikz}\hat{\Delta}(z) = e^{ik\hat{z}} \tag{25}$$

$$\int d^dz e^{ikz}\hat{\Delta}(z) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dz \int d^dk' \ e^{ikz}e^{-ik'z}e^{ik'\hat{z}} \tag{26}$$
$$= \int d^dk' \ \delta(k'-k)e^{ik'\hat{z}} = e^{ik\hat{z}} \tag{27}$$

これは *Weyl symbol* の定義から、*Fourier* 変換可能な関数の位置演算子を可換な物から非可換の物に取り換える

$$\widehat{\mathcal{W}}[e^{ikz}] = e^{ik\hat{z}} \tag{28}$$

という操作だが、後々便利である。

1.1.2 微分積分

微分演算子 $\hat{\partial}_i$ とその交換関係を

$$[\hat{\partial}_i, \hat{x}^j] = \delta_i^j \tag{29}$$
$$[\hat{\partial}_i, \hat{\partial}_j] = iB_{ij} \tag{30}$$

で定義する。ここで $\hat{\partial}_i$ は非可換空間の位置演算子 $\hat{x}_i$ に対する微分演算子であり、可換空間の x_i に対する微分演算子 ∂_i とは異なる。

命題 7.

$$[\hat{\partial}_j, \widehat{\Delta}(x,\hat{x})] = -\partial_j \widehat{\Delta}(x,\hat{x}) \tag{31}$$

交換関係から

$$[\hat{\partial}_j, (ik\hat{x})^n] = [\hat{\partial}_j, (ik\hat{x})](ik\hat{x})^{n-1} + \cdots + (ik\hat{x})^{n-1}[\hat{\partial}_j, (ik\hat{x})] \tag{32}$$
$$= nik_j\Big(ik\hat{x}\Big)^{n-1} \tag{33}$$

これを使うと、

$$\left[\hat{\partial}_j, e^{ik\hat{x}}\right] = \sum_n \frac{1}{n!}\left[\hat{\partial}_j, \left(ik\hat{x}\right)^n\right] \tag{34}$$

$$= \sum_n \frac{ik_j}{(n-1)!}\left(ik\hat{x}\right)^{n-1} \tag{35}$$

$$= ik_j e^{ik\hat{x}} \tag{36}$$

このため、

$$\left[\hat{\partial}_j, \widehat{\Delta}(x,\hat{x})\right] = \left[\hat{\partial}_j, \int d^dk e^{-ikx} e^{ik\hat{x}}\right] \tag{37}$$

$$= \int d^dk \left(ik_j e^{-ikx} e^{ik\hat{x}}\right) \tag{38}$$

一方、可換空間の微分演算子 ∂_j による $\widehat{\Delta}(x,\hat{x})$ を考えると、

$$\partial_j \widehat{\Delta}(x,\hat{x}) = \int d^dk \left(-ik_j e^{-ikx} e^{ik\hat{x}}\right) \tag{39}$$

以上を合わせると、

$$\left[\hat{\partial}_j, \widehat{\Delta}(x,\hat{x})\right] = -\partial_j \widehat{\Delta}(x,\hat{x}) \tag{40}$$

命題 8 (微分操作)**.**

$$\left[\hat{\partial}, \widehat{\mathcal{W}}[f]\right] = \widehat{\mathcal{W}}[\partial f] \tag{41}$$

$$\left[\hat{\partial}, \widehat{\mathcal{W}}[f]\right] = \left[\hat{\partial}, \int d^dx f(x) \hat{\Delta}(x,\hat{x})\right] \tag{42}$$

$$= \int d^dx f(x)(-\partial\hat{\Delta}(x,\hat{x})) \tag{43}$$

$$= \int d^dx (\partial f(x)) \hat{\Delta}(x,\hat{x}) \tag{44}$$

$$= \widehat{\mathcal{W}}[\partial f] \tag{45}$$

以上のように定義した $\hat{\partial}$ は非可換空間上の $\hat{A}$ というものにだけ作用するとき、$\hat{\partial}(\hat{A})$ となる。これは $[\hat{\partial}, \hat{A}] = \hat{\partial}(\hat{A})$ から交換関係としても定義することができる。このように交換関係を用いて定義される微分演算子のことを *"inner derivative"* と呼ぶ。

定義 1 (inner derivative)**.** 微分演算子 $\hat{\partial}$ の任意の $\hat{A}$ に対する作用がある $\hat{d}$ を用いて

$$\hat{\partial}(\hat{A}) = [\hat{d}, \hat{A}] \tag{46}$$

と定義できるとき $\hat{\partial}$ を *inner derivative* と呼ぶ。

$$\left[\hat{\partial}, \widehat{\mathcal{W}}[f]\widehat{\mathcal{W}}[g]\right] = \left[\hat{\partial}, \widehat{\mathcal{W}}[f]\right]\widehat{\mathcal{W}}[g] + \widehat{\mathcal{W}}[f]\left[\hat{\partial}, \widehat{\mathcal{W}}[g]\right] \tag{47}$$
$$= \widehat{\mathcal{W}}[\partial f]\widehat{\mathcal{W}}[g] + \widehat{\mathcal{W}}[f]\widehat{\mathcal{W}}[\partial g] \tag{48}$$
$$= \widehat{\mathcal{W}}\left[\partial f \star g + f \star \partial g\right] \tag{49}$$

命題 9 (Δ の並進対称性)**.**

$$e^{v^j \hat{\partial}_j}\hat{\Delta}(x, \hat{x})e^{-v^j \hat{\partial}_j} = \hat{\Delta}(x - v, \hat{x}) \tag{50}$$

$$e^{v\hat{\partial}}e^{ik\hat{x}}e^{-v\hat{\partial}} = e^{iv^\alpha k_\beta \delta^\beta_\alpha/2}e^{v\hat{\partial}+ik\hat{x}}e^{-v\hat{\partial}} \tag{51}$$
$$= e^{iv^\alpha k_\beta \delta^\beta_\alpha/2}e^{iv^\alpha k_\beta \delta^\beta_\alpha/2}e^{ik\hat{x}} \tag{52}$$
$$= e^{ivk}e^{ik\hat{x}} \tag{53}$$

これから、

$$e^{v\hat{\partial}}\widehat{\Delta}(x, \hat{x})e^{-v\hat{\partial}} = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d^d k e^{-ik(x-v)}e^{ik\hat{x}} = \widehat{\Delta}(x - v, \hat{x}) \tag{54}$$

ここに、Tr という巡回性を持つ演算を作用させると

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{\Delta}(x - v_i)\right) = \mathrm{Tr}\left(e^{v\partial}\widehat{\Delta}(x)e^{-v\partial}\right) = \mathrm{Tr}\left(\hat{\Delta}(x)\right) \tag{55}$$

つまり、Δ 単体に巡回性を持つ演算を行った際の結果は x に依存しない。これを用いると、$\mathrm{Tr}\left(\widehat{\Delta}(x)\right) = 1$ となるように Tr の定義を行って

$$\mathrm{Tr}\left(\widehat{\mathcal{W}}[f]\right)(\hat{x}) = \int d^d x f(x)\mathrm{Tr}\left(\widehat{\Delta}(x)\right) \tag{56}$$
$$= \int d^d x f(x) \tag{57}$$

さらに、右辺を見ると分かるように、$\mathrm{Tr}(\widehat{\mathcal{W}}[f])(\hat{x})$ は $\hat{x}$ に依存していない。

$$\mathrm{Tr}\left(\widehat{\mathcal{W}}[f]\right) = \int d^d x f(x) \tag{58}$$

つまり、非可換空間上の関数 $\widehat{\mathcal{W}}[f]$ の *trace* 操作は可換空間での f の積分に対応している。

命題 10.

$$e^{v\hat{\partial}}\widehat{\mathcal{W}}[f]e^{-v\hat{\partial}} = \widehat{\mathcal{W}}[e^{v\partial}f(x)] \tag{59}$$

$$e^{v\hat{\partial}}\widehat{\mathcal{W}}[f]e^{-v\hat{\partial}} = \int d^d x f(x)\hat{\Delta}(x-v,\hat{x}) \tag{60}$$
$$= \int d^d x f(x) e^{-v\partial}\big(\hat{\Delta}(x,\hat{x})\big) \tag{61}$$
$$= \int d^d x e^{v\partial}\big(f(x)\big)\hat{\Delta}(x,\hat{x}) \tag{62}$$
$$=\widehat{\mathcal{W}}[e^{v_i\partial_i} f(x)] \tag{63}$$

命題 11.

$$\mathrm{Tr}\Big(e^{i(k_0-k)\hat{x}}\Big) = \mathrm{Tr}\Big(\widehat{\mathcal{W}}[e^{i(k_0-k)x}]\Big) = \int d^d x e^{i(k_0-k)x} = (2\pi)^d \delta(k-k_0) \tag{64}$$

次に、異なる *2* 点 x, y での $\widehat{\Delta}$ の積を考える。

命題 12 (Δ の積)**.**

$$\widehat{\Delta}(x,\hat{x})\widehat{\Delta}(y,\hat{x}) = \frac{1}{|\det(\theta)|}\frac{1}{\pi^d}\int d^d z\hat{\Delta}(z,\hat{x})e^{-2i^t(x-z)\theta^{-1}(y-z)} \tag{65}$$

$$\widehat{\Delta}(x,\hat{x})\widehat{\Delta}(y,\hat{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{2d}}\int d^d k\int d^d k' e^{-ikx}e^{ik\hat{x}}e^{-ik'y}e^{ik'\hat{x}} \tag{66}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{2d}}\int d^d k\int d^d k' e^{-ikx}e^{-ik'y}e^{ik\hat{x}}e^{ik'\hat{x}} \tag{67}$$

ここに、*Baker-Campbell-Haussdorff* 公式 ($e^A e^B = \exp(A+B+[A,B]/2\cdots)$) を使うと、

$$\widehat{\Delta}(x,\hat{x})\widehat{\Delta}(y,\hat{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{2d}}\int d^d k\int d^d k' e^{-ikx}e^{-ik'y}e^{(ik\hat{x}+ik'\hat{x}-\frac{i}{2}k_\alpha\theta^{\alpha\beta}k'_\beta)} \tag{68}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{2d}}\int d^d k\int d^d k' e^{(-ikx-ik'y-\frac{i}{2}k_\alpha\theta^{\alpha\beta}k'_\beta)}e^{i(k+k')\hat{x}} \tag{69}$$

ここで補題 *6* の関係を使うと、

$$\widehat{\Delta}(x,\hat{x})\widehat{\Delta}(y,\hat{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{2d}}\int d^dk\int d^dk' e^{(-ikx-ik'y-\frac{i}{2}{}^tk\theta k')}\int d^dz\hat{\Delta}(z,\hat{x})e^{i(k+k')z} \tag{70}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2d}}\int d^dk\int d^dk'\int d^dz\hat{\Delta}(z,\hat{x})e^{(-ik(x-z)-ik'(y-z)-\frac{i}{2}{}^tk\theta k')} \tag{71}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2d}}\int d^dk\int d^dk'\int d^dz\hat{\Delta}(z,\hat{x})e^{i{}^tk(z-x-\frac{1}{2}\theta k')}e^{-ik'(y-z)} \tag{72}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d}}\int d^dk'\int d^dz\hat{\Delta}(z,\hat{x})\delta\Big(\frac{1}{2}\theta k'+x-z\Big)e^{-ik'(y-z)} \tag{73}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d}}\frac{2^d}{|\det(\theta)|}\int d^d\tilde{k}'\int d^dz\hat{\Delta}(z,\hat{x})\delta\Big(\tilde{k}'+x-z\Big)e^{-2i{}^t(\theta^{-1}\tilde{k}')(y-z)} \tag{74}$$

$$= \frac{2^d}{|\det(\theta)|}\frac{1}{(2\pi)^{d}}\int d^dz\hat{\Delta}(z,\hat{x})e^{-2i{}^t(z-x){}^t\theta^{-1}(y-z)} \tag{75}$$

$$= \frac{1}{|\det(\theta)|}\frac{1}{\pi^{d}}\int d^dz\hat{\Delta}(z,\hat{x})e^{-2i{}^t(x-z)\theta^{-1}(y-z)} \tag{76}$$

命題 13.

$$\mathrm{Tr}\Big(\widehat{\Delta}(x,\hat{x})\widehat{\Delta}(y,\hat{x})\Big) = \delta(x-y) \tag{77}$$

$$\mathrm{Tr}\Big(\widehat{\Delta}(x,\hat{x})\widehat{\Delta}(y,\hat{x})\Big) = \frac{1}{(2\pi)^{2d}}\mathrm{Tr}\Big(\int d^dk\int d^dk' e^{-ikx}e^{ik\hat{x}}e^{-ik'y}e^{ik'\hat{x}}\Big) \tag{78}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2d}}\mathrm{Tr}\Big(\int d^dk\int d^dk' e^{-ikx}e^{ik\hat{x}}e^{-ik'y}e^{ik'\hat{x}}\Big) \tag{79}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d}}\int d^dk\int d^dk' e^{-ikx}e^{-ik'y}\delta(-k-k') \tag{80}$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^{d}}\int d^dk e^{-ikx}e^{iky} = -\delta(y-x) = \delta(x-y) \tag{81}$$

命題 14 ($\widehat{\mathcal{W}}$ の逆操作)**.**

$$f(x) = \mathrm{Tr}\Big(\widehat{\mathcal{W}}[f]\hat{\Delta}(x,\hat{x})\Big) \tag{82}$$

$$\mathrm{Tr}\Big(\widehat{\mathcal{W}}[f](\hat{x})\hat{\Delta}(x,\hat{x})\Big) = \mathrm{Tr}\Big(\int d^dyf(y)\hat{\Delta}(y,\hat{x})\hat{\Delta}(x,\hat{x})\Big) \tag{83}$$

$$= \int d^dyf(y)\delta(y-x) = f(x) \tag{84}$$

1.1.3 Moyal 積

定義 2 (Moyal 積)**.** 関数 f, g の間の *Moyal* 積を以下のように定義する。

$$\widehat{\mathcal{W}}[f \star g] = \widehat{\mathcal{W}}[f]\widehat{\mathcal{W}}[g] \tag{85}$$

定理 15 (Moyal 積の展開)**.**

$$f(x) \star g(x) = f(x) \exp\left(\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial_i}\theta_{ij}\overrightarrow{\partial_j}\right)g(x) \tag{86}$$

$$= f(x)g(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!}\theta_{i_1 j_1}\cdots\theta_{i_n j_n}\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_n}f(x)\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_n}g(x) \tag{87}$$

ここで、右辺は $\mathbb{R}^d$ 上の点 x における関数 f, g とそれらの導関数からなっている。左辺が $(f \star g)(x)$ のように *Moyal* 積をとられた関数の $x \in \mathbb{R}^d$ での値ではなく、$f(x) \star g(x)$ と表記されているのはこれを意識している。

命題 16 (Leibniz 則)**.**

$$\left[\hat{\partial}, \widehat{\mathcal{W}}[f]\widehat{\mathcal{W}}[g]\right] = \widehat{\mathcal{W}}\left[\partial f \star g + f \star \partial g\right] \tag{88}$$

命題 17.

$$x_i \star f(x) - f(x) \star x_i = i\theta_{ij}\partial_j f(x) \tag{89}$$

$$x_i \star f(x) = x_i f(x) + \frac{i}{2}\theta_{ij}\partial_j f(x) \tag{90}$$

$$f(x) \star x_i = f(x)x_i + \frac{i}{2}\partial_j f(x)\theta_{ji} \tag{91}$$

から、$\theta_{ij} = -\theta_{ji}$ を使うと自明

定理 18 (座標と微分の対応)**.**

$$[\hat{x}_i, \widehat{\mathcal{W}}[f]] = i\theta_{ij}[\hat{\partial}_j, \widehat{\mathcal{W}}[f]] \tag{92}$$

命題 *17* から、*Weyl* 表現にすると、

$$\widehat{\mathcal{W}}[x_i \star - f \star x_i] = \widehat{\mathcal{W}}[i\theta_{ij}\partial_j f] \tag{93}$$

$$\left[\hat{x}_i, \widehat{\mathcal{W}}[f]\right] = i\theta_{ij}\widehat{\mathcal{W}}[\partial_j f(x)] \tag{94}$$

命題 *8* から、

$$\left[\hat{x}_i, \widehat{\mathcal{W}}[f]\right] = i\theta_{ij}\left[\hat{\partial}_j, \widehat{\mathcal{W}}[f]\right] \tag{95}$$

左から $-i(\theta^{-1})$ をかけると、

$$-i(\theta^{-1})_{ij}\left[\hat{x}_j, \widehat{\mathcal{W}}[f]\right] = \left[\hat{\partial}_i, \widehat{\mathcal{W}}[f]\right] \tag{96}$$

この関係から、交換関係のレベルでは非可換空間上の微分演算子 $\hat{\partial}$ と $-i(\theta^{-1})_{ij}$ は等価。

命題 19.

$$g(x)\star f(x) - f(x)\star g(x_i) = 2ig(x)\sin\left(\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial_i}\theta_{ij}\overrightarrow{\partial_j}\right)f(x) \tag{97}$$

$$g(x)\star f(x) + f(x)\star g(x_i) = 2ig(x)\cos\left(\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial_i}\theta_{ij}\overrightarrow{\partial_j}\right)f(x) \tag{98}$$

命題 20.

$$\int d^dx f(x)\star g(x) = \int d^dx f(x)g(x) \tag{99}$$

$$\int d^dx f(x)\star g(x) = \mathrm{Tr}\Big(\widehat{\mathcal{W}}[f\star g]\Big) = \mathrm{Tr}\Big(\widehat{\mathcal{W}}[f]\widehat{\mathcal{W}}[g]\Big) \tag{100}$$

$$= \mathrm{Tr}\Big(\int d^dy f(y)\hat{\Delta}(y,\hat{x})\int d^dz g(z)\hat{\Delta}(z,\hat{x})\Big) \tag{101}$$

$$= \int d^dy \int d^dz f(y)g(z)\delta(y-z) \tag{102}$$

$$= \int d^dz \ f(z)g(z) \tag{103}$$

$Moyal$ 積を n 項に拡張することも可能である。

命題 21.

$$\mathrm{Tr}\Big(\widehat{\mathcal{W}}[f_1]\cdots\widehat{\mathcal{W}}[f_n]\Big) = \int d^dx f_1(x)\star\cdots\star f_n(x) \tag{104}$$

$$= \int d^dx f_n(x)\star f_1(x)\star\cdots\star f_{n-1}(x) \tag{105}$$

以上の手続きから、可換空間の理論を非可換空間の理論にするには、可換空間の物理量 $f(x)$ を非可換空間の物理量 $\widehat{\mathcal{W}}[f](\hat{x})$ に変換してから理論を構築すればいい。

以降は具体的な計算に移るので、$\widehat{\mathcal{W}}$ を毎回書いていると読みづらい。以降は

$$\widehat{f} = \widehat{\mathcal{W}}[f] \tag{106}$$

のようにハットで区別する。

命題 22.

$$e^{ikx}\star e^{iqx}\star e^{-ikx} = e^{iq(x+\theta k)} \tag{107}$$

$$\widehat{\mathcal{W}}[e^{ikx} \star e^{iqx} \star e^{-ikx}] = \widehat{\mathcal{W}}[e^{ikx}]\widehat{\mathcal{W}}[e^{iqx}]\widehat{\mathcal{W}}[e^{-ikx}] \tag{108}$$
$$= e^{ik\hat{x}} e^{iq\hat{x}} e^{-ik\hat{x}} \tag{109}$$
$$= e^{-ik_i q_j \theta_{ij}/2} e^{i(k+q)\hat{x}} e^{-ik\hat{x}} \tag{110}$$
$$= e^{-ik_i q_j \theta_{ij}/2} e^{i(k+q)_i k_j \theta_{ij}/2} e^{iq\hat{x}} \tag{111}$$
$$= e^{ik_j q_i \theta_{ij}/2} e^{i(k+q)_i k_j \theta_{ij}/2} e^{iq\hat{x}} \tag{112}$$
$$= e^{i(k+2q)_i k_j \theta_{ij}/2} e^{iq\hat{x}} \tag{113}$$
$$= e^{iq_i k_j \theta_{ij}} e^{iq\hat{x}} \tag{114}$$
$$= e^{iq(\hat{x}+\theta k)} \tag{115}$$
$$e^{ikx} \star e^{iqx} \star e^{-ikx} = e^{iq(x+\theta k)} \tag{116}$$

ここで θ が反対称行列である事から $k\theta k = 0, k\theta q = -q\theta k$ となることを使った。

命題 23.

$$e^{ikx} \star f(x) \star e^{-ikx} = f(x + \theta k) \tag{117}$$

2 ゲージ理論

ここでは "非可換空間上の" ゲージ理論について説明する。通常、非可換ゲージ理論と言うと可換空間での "非可換群によって生成されるゲージ理論" の事を指すので、これと区別してスターゲージ理論とも呼ばれる。本節では非可換空間で共変微分を定義し一からゲージ理論を構成する方法を紹介する。

2.1 可換空間でのゲージ理論

可換空間でゲージ変換 $\mathfrak{g}$ とそれに伴うゲージ場 $A = (A_i, \ldots, A_n)$ があるとする。この際、共変微分を

$$\nabla = \partial - iA \tag{118}$$

で定義する。この時、定義から共変微分 ∇ とゲージ変換 $\mathfrak{g}$ は以下を満たす。

$$\nabla_g \mathfrak{g}\psi = \mathfrak{g}\nabla\psi \tag{119}$$

ここで、∇_g は g でゲージ変換された場に対する共変微分であり、$\mathfrak{g}$ は g の表現。これから、$\nabla_g = \partial - A_g$ とすると、

$$\partial\mathfrak{g} - iA_g\mathfrak{g} = \mathfrak{g}\partial - i\mathfrak{g}A \tag{120}$$
$$i([\partial, \mathfrak{g}] + \mathfrak{g}\partial) + A_g\mathfrak{g} = i\mathfrak{g}\partial + \mathfrak{g}A \tag{121}$$
$$i[\partial, \mathfrak{g}] + A_g\mathfrak{g} = \mathfrak{g}A \tag{122}$$
$$A_g = \mathfrak{g}A\mathfrak{g}^\dagger - i[\partial, \mathfrak{g}]\mathfrak{g}^\dagger \tag{123}$$

よくある表記に合わせるために、

$$0 = [\partial, \mathfrak{g}\mathfrak{g}^\dagger] = \mathfrak{g}[\partial, \mathfrak{g}^\dagger] + [\partial, \mathfrak{g}]\mathfrak{g}^\dagger \tag{124}$$

を使うと、A のゲージ変換性は

$$A_g = \mathfrak{g}A\mathfrak{g}^\dagger + i\mathfrak{g}[\partial, \mathfrak{g}^\dagger] \tag{125}$$

2.2 ゲージ場の Weyl 表現

以上の可換空間での表式を $Weyl$、非可換空間でのゲージ場の定義方法を予測してみる。ゲージ変換の $Weyl$ 表現を以下で定義する。

$$\widehat{\mathfrak{g}}(\hat{x}) = \int d^d x \hat{\Delta}(x, \hat{x}) \otimes \mathfrak{g}(x) \tag{126}$$

$$\mathbf{1} = \widehat{\mathfrak{g}}\widehat{\mathfrak{g}}^\dagger = \widehat{\mathfrak{g}}^\dagger\widehat{\mathfrak{g}} \tag{127}$$

ここで、$\mathfrak{g}$ は行列でもよく、行列の各成分に対して変換操作を行う。直積をとっているのはこの操作に対応している。

次に、ゲージ場を定義する。

$$\widehat{A}(\hat{x}) = \int d^d x \hat{\Delta}(x, \hat{x}) \otimes A(x) \tag{128}$$

とすると、可換空間の表式から、$Weyl$ 表示でのゲージ場は以下のように変換を受けると予想される。

$$\widehat{A} \to \widehat{\mathfrak{g}}\widehat{A}\widehat{\mathfrak{g}}^\dagger - i\widehat{\mathfrak{g}}\widehat{\partial(\mathfrak{g}^\dagger)} \tag{129}$$

ここで、

$$\left[\hat{\partial}, \widehat{\mathfrak{g}}^\dagger\right] = \widehat{\mathcal{W}}\left[\partial\mathfrak{g}^\dagger\right] \tag{130}$$

となることを用いると、

$$\widehat{A} \to \widehat{\mathfrak{g}}\widehat{A}\widehat{\mathfrak{g}}^\dagger - i\widehat{\mathfrak{g}}\left[\hat{\partial}, \widehat{\mathfrak{g}}^\dagger\right] \tag{131}$$

という形になる。

2.3 非可換空間からの定義方法

非可換空間での共変微分を以下で定義する

$$\hat{\nabla} = \hat{\partial} - i\hat{A} \tag{132}$$

共変微分の交換関係を調べると、

$$\left[\hat{\nabla}_i, \hat{\nabla}_j\right] = \left[\hat{\partial}_i, \hat{\partial}_j\right] + \left[\hat{A}_i, \hat{\partial}_j\right] + \left[\hat{\partial}_i, \hat{A}_j\right] + \left[A_i, \hat{A}_j\right] \tag{133}$$

$$= iB_{ij} + F_{ij} \tag{134}$$

ここで、B は $\hat{\partial}$ 間の非可換性から生じる項である。次に、ゲージ場を定義する。

$$\hat{\nabla}_g \hat{U}_g \hat{\psi} = \hat{U}_g \hat{\nabla} \hat{\psi} \tag{135}$$

これから、先ほどと同様に計算を行うと、

$$\widehat{A_g} = \hat{\mathfrak{g}}\hat{A}\hat{\mathfrak{g}}^\dagger + i\hat{\mathfrak{g}}[\hat{\partial}, \hat{\mathfrak{g}}^\dagger] \tag{136}$$

$Moyal$ 積に変換すると、

$$A_g = \mathfrak{g} \star A \star \mathfrak{g}^\dagger + i\mathfrak{g} \star \partial \mathfrak{g}^\dagger \tag{137}$$

非可換ゲージ理論では $\det(A \star B) = \det(A) \star \det(B)$ が成り立たないために、$SU(N)$ のような *special* ほにゃららといったゲージ対称性は $U(N) = U(1) \times SU(N)$ が成り立たない。

2.3.1 諸々

命題 24 ($B = \theta^{-1}$)**.**

$$B_{ij} = (\theta^{-1})_{ij} \tag{138}$$

$$iB_{ij} = [\hat{\partial}_i, \hat{\partial}_j] = -i(\theta^{-1})_{jk}[\hat{\partial}_i, \hat{x}^k] \tag{139}$$

$$= -i(\theta^{-1})_{jk}\delta_i^k \tag{140}$$

$$= i(\theta^{-1})_{ij} \tag{141}$$

定義 3 (共変座標)**.**

$$\hat{X}_i = (\theta^{-1})_{ij}\hat{x}_j + \hat{A}_i \tag{142}$$

$$= B_{ij}\hat{x}_j + \hat{A}_i \tag{143}$$

を共変座標と呼ぶ。

補題 25 (微分演算子との可換性)**.** 共変微分 $\hat{\nabla} = \hat{\partial} - i\hat{A}$ を以下の $\hat{\partial}'$ と $\hat{X}$ で分解する。

$$\hat{\partial}'_j = \hat{\partial}_j + i(\theta^{-1})_{jk}\hat{x}_k \tag{144}$$

$$= \hat{\partial}_j + iB_{jk}\hat{x}_k \tag{145}$$

この時、

$$[\hat{\partial}', \hat{X}] = 0 \tag{146}$$

$$\left[\hat{\partial}'_i, \hat{X}_j\right] = \left[\hat{\partial}_i + i(\theta^{-1})_{ik}\hat{x}_k, (\theta^{-1})_{jl}\hat{x}_l + \hat{A}_j\right] \tag{147}$$

$$= (\theta^{-1})_{ji} - (\theta^{-1})_{ik}\theta_{kl}(\theta^{-1})_{jl} + \left[\hat{\partial}_i, \hat{A}_j\right] + \left[i(\theta^{-1})_{ik}\hat{x}_k, \hat{A}_j\right] \tag{148}$$

$$= (\theta^{-1})_{ji} - (\theta^{-1})_{ji} + \left[\hat{\partial}_i, \hat{A}_j\right] - \left[\hat{\partial}_i, \hat{A}_j\right] = 0 \tag{149}$$

命題 26.

$$[\hat{\partial}'_i, \hat{\partial}'_j] = \theta_{ij} + iB_{ij} \tag{150}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{\partial}'_i, \hat{\partial}'_j] =& [\hat{x}_i + B_{ik}\hat{x}_k, \hat{x}_j + B_{jl}\hat{x}_l] && (151)\\
=& \theta_{ij} + iB_{ik}\theta_{kj} + iB_{jl}\theta_{il} + iB_{ik}\theta_{kl}B_{jl} && (152)\\
=& \theta_{ij} - \delta_{ij} + \delta_{ij} + iB_{ik}\delta_{kj} && (153)\\
=& \theta_{ij} + iB_{ij} && (154)
\end{aligned}$$

命題 27 (併進操作は star ゲージ変換)**.** 併進操作もゲージ変換

命題 *22* からゲージ変換を $\hat{U}_v = e^{ik\hat{v}}$ で定義したときもゲージ変換になる

2.4 ゲージ不変量

本節ではゲージ不変量の作成方法を解説する。

2.5 可換空間での理論

可換空間 $\mathbb{R}^d$ 上のある一点で状態 $\psi(x_0)$ が存在したとする。これを $\nabla_\mu \psi(x) = 0$ に沿って平行移動することを考える。この時、

$$\partial_\mu \psi(x) = iA(x)\psi(x) \tag{155}$$

であり、形式的に始点 x_0 から y へ積分すると、

$$\begin{aligned}
\psi(y) =& U(y, x_0)\psi(x_0) && (156)\\
U(y, x_0) =& P \exp\left(i \int_{x_0}^{y} dx'^\mu \ A_\mu(x')\right) && (157)
\end{aligned}$$

ここで、P は経路順序。

$U(y, x)$ に対してゲージ変換を行うと

$$\begin{aligned}
\int_x^y dx'^\mu \ A_\mu(x') \to& \int_x^y dx'^\mu \ \left(\mathfrak{g}(x')A_\mu(x')\mathfrak{g}^\dagger(x') + \mathfrak{g}(x')\partial_\mu \mathfrak{g}^\dagger(x')\right) && (158)\\
=& \int_x^y \ \left(\mathfrak{g}(x')dA(x')\mathfrak{g}^\dagger(x') + \mathfrak{g}(x')d\mathfrak{g}^\dagger(x')\right) && (159)
\end{aligned}$$

これから

$$U(y, x) \to \mathfrak{g}(y)U(y, x)\mathfrak{g}(x)^\dagger \tag{160}$$

となるので、$y = x$ の時、

$$\mathrm{Tr}\Big(U(y, x)\Big) = \mathrm{Tr}\Big(\mathfrak{g}(y)U(y, x)\mathfrak{g}(x)^\dagger\Big) \tag{161}$$

つまり、ある $\psi(x_0)$ をある閉経路に沿って平行移動して得られる項はゲージ不変である。この経路を *Wilson loop* と呼ぶ。

2.6 非可換空間での理論

非可換空間でも同様の手続きを行いたいが、非可換空間では積分がトレースになるので少し気持ち悪い。そこで、可換空間での積を *Moyal* 積にすることで非可換空間での対応物を作り、その後、非可換空間での形式を見る。

2.6.1 Moyal 積

可換空間の積を *Moyal* 積に置き換えることによって、

$$U(y,x) = P\exp_\star\left(i\int_x^y dx'^\mu\ A_\mu(x')\right) \tag{162}$$

これも以下のようにゲージ変換を受ける。

$$U(y,x) \to \mathfrak{g}(y) \star U(y,x) \star \mathfrak{g}(x)^\dagger \tag{163}$$

加えて、補題 *22* から $\theta k = y - x$ とすると、

$$U(y,x) = U(x+\theta k, x) \tag{164}$$

ここで、$U(x+\theta k, x)$ は k が固定されている時 x の関数と見做すことができる。これを k でフーリエ変換すると、巡回性から

$$\int d^dx\ e^{-ikx} \star U(x+\theta k, x) \tag{165}$$

ここで、補題 *20* から被積分関数は $\mathfrak{g}(x+\theta k)e^{-ikx}$ でもいい。これを定義するとこれもまたゲージ不変になる。

実際、補題 *22* と被積分関数の巡回性から

$$\begin{aligned}\int d^dx\ e^{-ikx} \star U(x+\theta k, x) \to& \int d^dx\ e^{-ikx} \star \mathfrak{g}(x+\theta k) \star U(x+\theta k, x) \star \mathfrak{g}(x)^\dagger && (166)\\ =& \int d^dx\ \mathfrak{g}(x) \star e^{-ikx} \star U(x+\theta k, x) \star \mathfrak{g}(x)^\dagger && (167)\\ =& \int d^dx\ e^{-ikx} \star U(x+\theta k, x) && (168)\end{aligned}$$

定義 4 (Wilson line)**.** $\mathbb{R}^d$ 空間上の x から y を通る直線 $\mathcal{C}$ を考える。k を $\theta^{-1}(y-x)$ となるように取ったとき、

$$\mathcal{U}_\mathcal{C} = \int d^dx\ \mathrm{tr}_{mtx}\Big(U(y,x) \star e^{-ikx}\Big) \tag{169}$$

はゲージ不変量になり、*"Wilson line"* と呼ばれる。

次に、作用素も入れ込む。ゲージ変換に対し $\hat{\mathcal{O}} \to \hat{U}_g \mathcal{O} \hat{U}_g^\dagger$ と振る舞う作用素を考える。U で平行移動した後に作用素 $\mathcal{O}$ を拾うとすると、

$$\int d^dx\ e^{-ikx} \star \Big(\mathcal{O}(x+\theta k) \star U(x+\theta k, x)\Big) \tag{170}$$

これがゲージ不変であることは

$$\int d^dx\ e^{-ikx}\star\Big(\mathfrak{g}(x+\theta k)\mathcal{O}(x+\theta k)\star U(x+\theta k,x)\mathfrak{g}(x+\theta k)^\dagger\Big) \tag{171}$$

から自明。これを繰り返すと、

$$\int d^dx\ P\prod_n e^{-ik_nx}\star\Big(\mathcal{O}(x+\theta\sum_{n'}^{n}k_{n'})\star U(x+\theta\sum_{n'}^{n-1}k_{n'},x)\Big) \tag{172}$$

ここで、$\sum_n k_n=k$。これからわかるように、作用素と始点の間の相対位置が決まってしまうと k_n がすべて決まる。そして、$n\to\infty$ の極限では経路上の任意の点が θk の形式で表されないといけない。

2.6.2 非可換空間

x から y への平行移動 U の経路 $\mathcal{C}$ を定義する。*(*以降では $\mathcal{C}$ と (y,x) の組は同じものを表す。*)* この経路を N 分割する。この際、平行移動は微小な平行移動 $U(x+n\mathcal{C}/N,x+(n-1)\mathcal{C}/N)$ の積と考える。すると、式 *(162)* は

$$U(y,x)=P\star\prod_n U\big(x+\frac{\mathcal{C}}{N},x+(n-1)\frac{\mathcal{C}}{N}\big) \tag{173}$$

と書くことができる。これを $Weyl$ 表現にするには

$$\widehat{\mathcal{W}}\Big[U(x+\mu,x)\Big]=\widehat{\mathcal{W}}\Big[P\exp\Big(i\int_x^{x+\mu}d\xi^\lambda A_\lambda\Big)\Big] \tag{174}$$

ここで、μ が固定されている限り、$U(x+\mu,x)$ は x の関数と見做せるので、適切な $\hat{u}$ を用いれば

$$U(x+\mu,x)=\mathrm{Tr}(\hat{u}\hat{\Delta}(x)) \tag{175}$$

と表すことができる。次に、$U(x+2\mu,x+\mu)$ を考える。すると、これは

$$U(x+2\mu,x+\mu)=\mathrm{Tr}(\hat{u}\hat{\Delta}(x+\mu)) \tag{176}$$

となるので、$e^{\mu\hat{\partial}}$ を用いて、

$$U(x+2\mu,x+\mu)=\mathrm{Tr}(\hat{u}e^{-\mu\hat{\partial}}\hat{\Delta}(x)e^{\mu\hat{\partial}}) \tag{177}$$

$$=\mathrm{Tr}(e^{\mu\hat{\partial}}\hat{u}e^{-\mu\hat{\partial}}\hat{\Delta}(x)) \tag{178}$$

以上から、$Moyal$ 積をとると、

$$U(x+2\mu,x+\mu)\star U(x+\mu,x)=\mathrm{Tr}(e^{\mu\hat{\partial}}\hat{u}e^{-\mu\hat{\partial}}\hat{\Delta}(x))\star\mathrm{Tr}(\hat{u}\hat{\Delta}(x)) \tag{179}$$

$$=\mathrm{Tr}(e^{\mu\hat{\partial}}\hat{u}e^{-\mu\hat{\partial}}\hat{u}\hat{\Delta}(x)) \tag{180}$$

同様に、$U(x+3\mu,x+2\mu)$ もかけると、今度は $\hat{\Delta}(x+2\mu)$ が出てくるので、

$$U(x+3\mu,x+2\mu)\star U(x+2\mu,x+\mu)\star U(x+\mu,x)=\mathrm{Tr}(e^{2\mu\hat{\partial}}\hat{u}e^{-2\mu\hat{\partial}}e^{\mu\hat{\partial}}\hat{u}e^{-\mu\hat{\partial}}\hat{u}\hat{\Delta}(x)) \tag{181}$$

$$=\mathrm{Tr}(e^{2\mu\hat{\partial}}\hat{u}(e^{-\mu\hat{\partial}}\hat{u})(e^{-\mu\hat{\partial}}\hat{u})\hat{\Delta}(x)) \tag{182}$$

$n\mu$ でちょうど $\mathcal{C}$ になるとすると、

$$U(y,x+(n-1)\mu)\star\cdots\star U(x+\mu,x) = \mathrm{Tr}(e^{(n-1)\mu\hat{\partial}}u(e^{-\mu\hat{\partial}}\hat{u})^{n-1}\hat{\Delta}(x)) \tag{183}$$

$$= \mathrm{Tr}(e^{n\mu\hat{\partial}}e^{-\mu\hat{\partial}}u(e^{-\mu\hat{\partial}}\hat{u})^{n-1}\hat{\Delta}(x)) \tag{184}$$

$$= \mathrm{Tr}(e^{n\mu\hat{\partial}}(e^{-\mu\hat{\partial}}\hat{u})^{n}\hat{\Delta}(x)) \tag{185}$$

ここで、$\hat{\mu}$ は非可換空間上のどこでも $\hat{\mu}$ なので、$\mathcal{C}$ を固定したまま $n\to\infty$ とすると、

$$e^{n\mu\hat{\partial}} \xrightarrow{n\to\infty} \exp\Big(\int_{\mathcal{C}} d\xi\hat{\partial}\Big) \tag{186}$$

問題は次である。$\hat{u}$ の定義から

$$e^{-\mu\hat{\partial}}\hat{u} = e^{-\mu\hat{\partial}}e^{i\mu\hat{A}} \tag{187}$$

$$= e^{-\mu\hat{\partial}+i\mu\hat{A}}e^{-i\mu^2[\hat{\partial},\hat{A}]} \tag{188}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} e^{-\mu\hat{\partial}+i\mu\hat{A}} = e^{-\mu\hat{\nabla}} \tag{189}$$

最後の行では μ^2 に比例する位相項は $n\to\infty$ でゼロになることを使った。以上から、

$$\hat{D}_{\hat{\partial}}(\mathcal{C}) = P\exp\Big(\int_{\mathcal{C}} d\xi_i\hat{\partial}_i\Big) \tag{190}$$

$$\hat{D}_{-\hat{\nabla}}(\mathcal{C}) = P\exp\Big(-\int_{\mathcal{C}} d\xi_i\hat{\nabla}_i\Big) \tag{191}$$

を定義すると、

$$U(y,x) = \mathrm{Tr}\Bigg(\hat{D}_{\hat{\partial}}(\mathcal{C})\hat{D}_{-\hat{\nabla}}(\mathcal{C})\hat{\Delta}(x,\hat{x})\Bigg) \tag{192}$$

命題 28 ($\hat{D}_{-\hat{\nabla}}(\mathcal{C})$ のゲージ変換性)**.**

$$\hat{\nabla}_{-\hat{\nabla}}(\mathcal{C}) \to \hat{U}_g(x+\mathcal{C})\hat{\nabla}_{-\hat{\nabla}}(\mathcal{C})\hat{U}_g(x)^\dagger \tag{193}$$

命題 29.

$$\hat{\nabla}_{\hat{\partial}}(\mathcal{C})\hat{\Delta}(\hat{x})\hat{\nabla}_{\hat{\partial}}(\mathcal{C})^\dagger = \hat{\Delta}(x-(y-x)) \tag{194}$$

$\mathcal{C}$ を n 個の線分 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ で近似する。この時、$\int_{\mu_j} d\xi_i\partial_i = \mu_i$ とすると、命題 *9* から

$$\exp\Big(\int_{\mu_i} d\xi_i\hat{\partial}_i\Big)\hat{\Delta}(x,\hat{x})\exp\Big(\int_{\mu_i} d\xi_i\hat{\partial}_i\Big)^\dagger = \hat{\Delta}(x-\mu_i,\hat{x}) \tag{195}$$

これを繰り返すと、

$$P\prod_{i=1}^{n}\exp\Big(\int_{\mu_i} d\xi_i\hat{\partial}_i\Big)\hat{\Delta}(x,\hat{x})P\prod_{i=1}^{n}\exp\Big(\int_{\mu_i} d\xi_i\hat{\partial}_i\Big)^\dagger = \hat{\Delta}(x-\sum_{i=1}^{n}\mu_i,\hat{x}) \tag{196}$$

$$= \hat{\Delta}(x-(y-x),\hat{x}) \tag{197}$$

以上から、

$$\hat{\nabla}_{\hat{\partial}}(\mathcal{C})\hat{\Delta}(x,\hat{x})\hat{\nabla}_{\hat{\partial}}(\mathcal{C})^\dagger = \hat{\Delta}(x-(y-x),\hat{x}) \tag{198}$$

次に、ゲージ変換性を見る。このために、ゲージ場に合わせて $e^{-ik\hat{x}}$ を以下のように拡張しておく。

定義 5.

$$\hat{S}_v = \int d^dx\hat{\Delta}(x)\otimes e^{ikx}\mathbf{1} = e^{ik\hat{x}}\otimes\mathbf{1} \tag{199}$$

ここで、$\theta k = (y-x)$

$$\hat{S}_v = \int d^dx\hat{\Delta}(x)\otimes e^{ikx}\mathbf{1} \tag{200}$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dx\int d^dq e^{-iqx}e^{iq\hat{x}}\otimes e^{ikx}\mathbf{1} \tag{201}$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dx\int d^dq e^{-i(q-k)x}e^{iq\hat{x}}\otimes\mathbf{1} \tag{202}$$
$$=\int d^dq\delta(q-k)e^{iq\hat{x}}\otimes\mathbf{1} \tag{203}$$
$$=e^{ik\hat{x}}\otimes\mathbf{1} \tag{204}$$

命題 30.

$$\hat{S}_v\hat{\Delta}(x,\hat{x})\hat{S}_v^\dagger = \hat{\Delta}(x+v,\hat{x}) \tag{205}$$

$$\hat{S}_v\hat{\Delta}(x,\hat{x})\hat{S}_v^\dagger = e^{ik\hat{x}}\hat{\Delta}(x,\hat{x})e^{-ik\hat{x}}\otimes\mathbf{1} \tag{206}$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dq\ e^{ik\hat{x}}e^{-iqx}e^{iq\hat{x}}e^{-ik\hat{x}}\otimes\mathbf{1} \tag{207}$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dq\ e^{-iqx}e^{iq\hat{x}}e^{-iqv}\otimes\mathbf{1} \tag{208}$$

つまり、$\tilde{f}(q) = e^{-iq(x+v)}$ なので、逆 *Fourier* 変換すると、

$$f(y) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dq e^{iqy}e^{-iq(x+v)} = \delta(y-(x+v))) \tag{209}$$

これから、

$$\widehat{\mathcal{W}}[\delta(y-(x+v))] = \int d^dy\ \delta(y-(x+v))\Delta(y,\hat{x}) = \Delta(x+v,\hat{x}) \tag{210}$$

命題 31.

$$\left[\hat{\nabla}(\mathcal{C})\hat{S}_v, \Delta(x,\hat{x})\right] = 0 \tag{211}$$

$$\hat{\nabla}(\mathcal{C})\hat{S}_v\Delta(x,\hat{x}) = \hat{\nabla}(\mathcal{C})\Delta(x+v,\hat{x})\hat{S}_v \tag{212}$$
$$= \Delta(x,\hat{x})\hat{\nabla}(\mathcal{C})\hat{S}_v \tag{213}$$

$$U(x+\mathcal{C},x) \xrightarrow{\hat{\nabla}\to\hat{g}\hat{\nabla}\hat{g}^\dagger} \mathrm{Tr}\Bigg(\hat{D}_{\hat{\partial}}(\mathcal{C})\hat{g}\hat{D}_{-\hat{\nabla}}(\mathcal{C})\hat{g}^\dagger\hat{\Delta}(x,\hat{x})\Bigg) \tag{214}$$
$$= P\exp\Big(\int_{\mathcal{C}} d\xi\partial\Big)\star g(x)\star P\exp\Big(-\int_{\mathcal{C}} d\xi\nabla\Big)\star g^\dagger(x) \tag{215}$$
$$= g(x+\mathcal{C})\star P\exp\Big(\int_{\mathcal{C}} d\xi\partial\Big)\star P\exp\Big(-\int_{\mathcal{C}} d\xi\nabla\Big)\star g^\dagger(x) \tag{216}$$
$$= g(x+\mathcal{C})\star U(x+\mathcal{C},x)\star g^\dagger(x) \tag{217}$$

これを用いると、$\mathcal{U}_{\mathcal{C}}$ のゲージ変換性は

$$\mathcal{U}_{\mathcal{C}} = \int d^dx \mathrm{tr}_{mtx}\Big(U(x+\mathcal{C},x)\Big)\star e^{-ikx} \tag{218}$$
$$= \int d^dx \mathrm{tr}_{mtx}\Big(U(x+\mathcal{C},x)\star S_v^\dagger\Big) \tag{219}$$
$$\to \int d^dx \mathrm{tr}_{mtx}\Big(g(x+\mathcal{C})\star U(x+\mathcal{C},x)\star g(x)^\dagger\star S_v^\dagger\Big) \tag{220}$$
$$= \int d^dx \mathrm{tr}_{mtx}\Big(g(x)\star S_v^\dagger\star U(x+\mathcal{C},x)\star g(x)^\dagger\Big) \tag{221}$$
$$= \int d^dx \mathrm{tr}_{mtx}\Big(S_v^\dagger\star U(x+\mathcal{C},x)\Big) \tag{222}$$
$$= \int d^dx \mathrm{tr}_{mtx}\Big(U(x+\mathcal{C},x)\Big)\star e^{-ikx} \tag{223}$$

3 非可換トーラス

3.1 正方格子

$$U_iU_j = e^{-i\theta_{ij}}U_jU_i \tag{224}$$

という関係があるとする。仮に U の表現を

$$U_j = e^{i\hat{x}_j} \tag{225}$$

と定義したとすると、

$$U_iU_j = e^{i\hat{x}_i}e^{i\hat{x}_j} = e^{i(\hat{x}_i+\hat{x}_j)}e^{-i\theta_{ij}/2} \tag{226}$$

となるので、

$$U_iU_j = e^{-i\theta_{ij}}U_jU_i \tag{227}$$

つまり、$\exp(i\hat{x}_j)$ は U の表現になっている。

命題 32 (微分)**.**

$$[\hat{\partial}_i, U_j] = i\delta_{ij}U_j \tag{228}$$

命題 33.

$$\mathrm{Tr}(U_1^{n_1}\cdots U_d^{n_d}) = \delta_{n,0} \tag{229}$$

命題 *11* から

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(U_1^{n_1}\cdots U_d^{n_d}) =& \mathrm{Tr}(e^{i\hat{x}^1 n_1}e^{i\hat{x}^2 n_2}\cdots e^{i\hat{x}^d n_d}) & (230)\\ =& e^{-in_1n_2\theta_{12}/2}\mathrm{Tr}(e^{i(\hat{x}^1 n_1+\hat{x}^2 n_2)}\cdots e^{i\hat{x}^d n_d}) & (231)\\ =& e^{-i(n_1n_2\theta_{12}+n_1n_3\theta_{13}+n_2n_3\theta_{23})/2}\mathrm{Tr}(e^{i(\hat{x}^1 n_1+\hat{x}^2 n_2+\hat{x}^3 n_3)}\cdots e^{i\hat{x}^d n_d}) & (232)\\ =& \prod_{a<b} e^{-in_an_b\theta ab/2}\mathrm{Tr}\Big(e^{i\sum_j n_j\hat{x}^j}\Big) & (233)\\ =& \prod_j \delta_{n_j,0} & (234)\end{aligned}$$

3.1.1 可換トーラス

トーラスを以下で定義する。

$$f(x) = f(x + 2\pi n_a T^{ab}) \tag{235}$$

ここで、$n^a,\ a = 1,\dots,d$ は整数で、T は周期を表す行列。例として、n_1 以外の n_i がゼロの時、

$$x + 2\pi n_1 T^{1b} = (x + 2\pi n_1 T^{11},\dots,x^d + 2\pi n_1 T^{1d}) \tag{236}$$

のようになる。このトーラスの上の波数は周期性から

$$k_i^m = \sum_a T_{ia}^{-1} m_a \tag{237}$$

と量子化される。このため、トーラス上の任意の一価関数 f はこの波数を用いて *Fourier* 変換することが可能で、

$$f(x) = f_m \sum_m e^{ik^m x} \tag{238}$$

となる。

3.2 非可換化

可換トーラスを *Weyl* 表現を用いて非可換化するには $e^{ikx} \to e^{ik\hat{x}}$ のように変換すればいい。

$$\widehat{\mathcal{W}}[f] = \sum_m e^{ik^m\hat{x}} f_m \tag{239}$$

ここで、トーラスの周期性から積分が和に代わっている。本来はこれでも良いのだが、せっかくなら U を用いて表したい。これには命題 *33* で行った展開の逆操作を行って、

$$e^{ik^m\hat{x}} = \Big(\prod_{a<b} e^{im_a m_b \Theta_{ab}}\Big) U_1^{m_1}\cdots U_d^{m_d} \tag{240}$$

から

$$\widehat{\mathcal{W}}[f] = \sum_m f_m \Big(\prod_{a<b} e^{im_a m_b \Theta_{ab}}\Big) U_1^{m_1}\cdots U_d^{m_d} \tag{241}$$

ここで、θ でなく Θ を使っているのは T の影響で

$$U_i = \exp\Big(ik_i^1 \hat{x}_i\Big) = \exp\Big(\sum_a iT_{ai}^{-1}\hat{x}_i\Big) \tag{242}$$

と定義されているからである。これから

$$U_iU_j = e^{-ik_ik_j\theta_{ij}/2}U_jU_i \tag{243}$$

$$= e^{-i\sum_{ab}T_{ai}^{-1}T_{bj}^{-1}\theta_{ij}/2}U_jU_i \tag{244}$$

$$\Theta_{ij} = \sum_{ab} T_{ai}^{-1}T_{bj}^{-1}\theta_{ij} \tag{245}$$

最後に、f_m も具体的に書いてあげると、実空間での積分の際の変数変換から

$$\int_T dx = \Big(\int_0^1 dt\Big)^d |\det(T)| \tag{246}$$

なので

$$\hat{\Delta}(x,\hat{x}) = \frac{1}{|\det(T)|}\sum_m \Big(\prod_{a<b} e^{im_a m_b \Theta_{ab}}\Big) U_1^{m_1}\cdots U_d^{m_d} e^{ik^m x} \tag{247}$$

命題 34 (Δ の周期性)**.**

$$\hat{\Delta}(x + 2\pi\sum_i T_{ia}) = \hat{\Delta}(x) \tag{248}$$

命題 35.

$$\Big[\hat{\partial}_i, U_j\Big] = iT_{ai}^{-1}U_j \tag{249}$$

3.2.1 非可換トーラス上の Wilson line

$\mathbb{R}_\theta^d$ では *Wilson line* がゲージ不変となるのは $k=\theta^{-1}v$ となるときだった。しかし、非可換トーラス $\mathbb{T}_\theta^d$ に関してはそれだけではない。ある k があったとき、v のほかに

$$(v_n)_i = v_i + n^\alpha T i\alpha \tag{250}$$

のような T の整数倍動いた位置でも不変になる。

参考文献

[1] Richard J Szabo. Quantum field theory on noncommutative spaces. Physics Reports*, Vol. 378, No. 4, pp. 207–299, 2003.*

[2] Michael R Douglas and Nikita A Nekrasov. Noncommutative field theory. Reviews of Modern Physics*, Vol. 73, No. 4, p. 977, 2001.*

[3] Badis Ydri. Lectures on matrix field theory*. Springer, 2017.*

[4] Jan Ambjørn, Yuri M Makeenko, Jun Nishimura, and Richard J Szabo. Lattice gauge fields and discrete noncommutative yang-mills theory. Journal of High Energy Physics*, Vol. 2000, No. 05, p. 023, 2000.*

[5] Jan Ambjørn, Yuri M Makeenko, Jun Nishimura, and Richard J Szabo. Finite n matrix models of noncommutative gauge theory. Journal of High Energy Physics*, Vol. 1999, No. 11, p. 029, 1999.*

[6] R. Giles. Reconstruction of gauge potentials from wilson loops. Phys. Rev. D*, Vol. 24, pp. 2160–2168, Oct 1981.*

[7] Nathan Seiberg and Edward Witten. String theory and noncommutative geometry. Journal of High Energy Physics*, Vol. 1999, No. 09, p. 032, 1999.*